Funktionentheorie – Komplexe Kurvenintegrale

Themen des Tutoriums am 24.06.2015:

- Jede komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ kann man darstellen als

  $$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\ ,$$

  wobei u und v reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind.

- Für eine komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und einem Weg $\gamma : [a, b] \to D$ definiert man das *komplexe Kurvenintegral entlang* γ als:

  $$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\ .$$

  Das rechte Integral ist natürlich als zwei bekannte reelle Integrale zu intepretieren:

  $$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left[f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\right]\, dt + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}\left[f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\right]\, dt\ .$$

- Wichtige Abschätzung:

  $$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \max_{t \in [a,b]} f(\gamma(t)) \cdot L[\gamma]$$

- Wenn man über eine geschlossene Kurve integriert, so schreibt oft $\oint$ für das Integralzeichen. Insbesondere kürzt man die Integration über einen Kreis mit Radius r mit Mittelpunkt im Ursprung, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird, gerne mit

  $$\oint_{|z|=r} f(z)\, dz := \int_\gamma f(z)dz \quad \text{mit } \gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}\ ,\ t \in [0, 2\pi]$$

  aus.

- Hat f eine Stammfunktion F auf D, d. h. $F' = f$ mit $F : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden Weg $\gamma : [a, b] \to D$:

  $$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- **Cauchy'scher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete:** Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und γ ein geschlossener (stückweise) glatter Weg in D. Dann gilt für alle *holomorphen* Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$

  $$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0\ .$$

Hinweis: Ich verwende i *für die imaginäre Einheit und* $\overline{z}$ *für die komplexe Konjugation.*

Aufgabe 46

Berechnen Sie das Kurvenintegral für die Funktion $f(z) = z^2$ zwischen den Punkten 0 und $1 + i$. Verbinden Sie die Punkte dabei durch eine Gerade.

Aufgabe 47

Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f(z) = \overline{z}$ entlang der folgenden Wege. Skizzieren Sie die Wege zuerst.

(a) $\gamma_a(t) := (1-t) + \mathrm{i}t$ mit $t \in [0,1]$

(b) $\gamma_b(t) := e^{i\frac{\pi}{2}t}$ mit $t \in [0,1]$

(c) $\gamma_c(t) := \begin{cases} 1 + \mathrm{i}t & t \in [0,1] \\ (2-t) + \mathrm{i} & t \in [1,2] \end{cases}$

Begründen Sie nun, warum f keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$ haben kann.

Aufgabe 48

(a) Berechnen Sie für $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$ das Kurvenintegral entlang $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Ist der Cauchy'sche Integralsatz erfüllt? Falls nicht: Warum nicht?

(b) Betrachten Sie für $R > 0$ das Kurvenintegral

$$\oint_{|z|=R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\, dz$$

und zeigen Sie, dass ein Größerwerden des Kreises zu folgendem Ergebnis führt:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\, dz = 0\,.$$

Aufgabe 49

Geben Sie für die komplexe Exponentialfunktion eine Stammfunktion an und berechnen Sie

$$\int_\gamma e^z\, dz$$

für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t^2 + 5t^3 - 6t^4 + \mathrm{i}\sin(\pi t/2)$.

Aufgabe 50

Es soll das Kurvenintegral über der Funktion $f(z) = 1/z$ entlang einer Ellipse berechnet werden. Es seien nun $a, b > 0$ und die Wege $\rho, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= a\cos(2\pi t) + \mathrm{i}a\sin(2\pi t)\,,\\ \gamma(t) &= a\cos(2\pi t) + \mathrm{i}b\sin(2\pi t)\,.\end{aligned}$$

Skizzieren Sie diese Wege und zeigen Sie zuerst, dass

$$\int_\rho \frac{1}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$

gilt. Verwenden Sie dabei die Skizze und mehrmals den Cauchy'schen Integralsatz.

Berechnen Sie dann mit dem Wissen von Aufgabe 48(a) das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,dt\,.$$

Lösungen

Auf den folgenden Seiten findet ihr meine eigenen Lösungen der Aufgaben. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen.

Lösung zu Aufgabe 46

Das Ergebnis ist $\frac{1}{3}(1+\mathrm{i})^3 = -\frac{2}{3} + \mathrm{i}\frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 47

Zu (a): Das Ergebnis ist $-\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}$.

Zu (b): Das Ergebnis ist $\mathrm{i}\pi/2$.

Zu (c): Das Ergebnis ist $(\mathrm{i}+1/2) + (\mathrm{i}-1/2) = 2\mathrm{i}$.

Die Funktion kann keine Stammfunktion in $\mathbb{C}$ haben, denn sonst wäre das Kurvenintegral nur abhängig von Anfangs- und Endpunkt.

Lösung zu Aufgabe 48

Zu (a): Das Kurvenintegral ist nicht schwer zu berechnen, da $\gamma'(t) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$ gilt:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,dt = 2\pi\mathrm{i}\,.$$

Der Cauchy'sche Integralsatz ist nicht erfüllt, da das Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist. Es hat eine Lücke in der Null.

Zu (b): Dazu brauchen wir die Ungleichung von oben, welche die Länge der Kurve $L[\gamma_R]$ benutzt:

$$\begin{aligned}\left|\oint_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq L[\gamma_R]\max_t |f(\gamma_R(t))| = 2\pi R\left|\frac{1}{(1-R^2)^2}\right| \\ &= 2\pi R\frac{1}{|1-2R-R^4|} \leq 2\pi\frac{R}{R^4+1} \qquad \text{für } R>1 \\ &= 2\pi\frac{1}{R^3+\frac{1}{R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.\end{aligned}$$

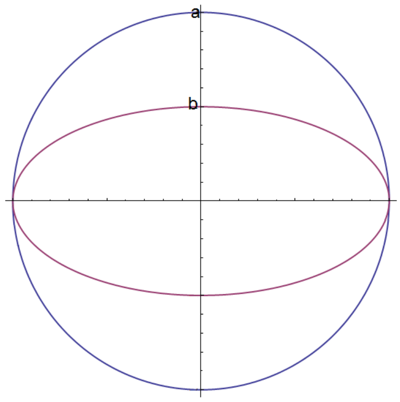
Lösung zu Aufgabe 49

Die Stammfunktion ist durch $F(z) = e^z$ gegeben und deswegen ist das Kurvenintegral nicht abhängig vom Weg, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt:

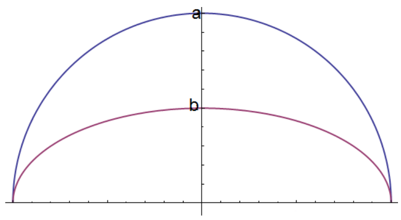
$$\int_\gamma e^z\,dz = F(\mathrm{i}) - F(0) = e^{ii} - 1\,.$$

Lösung zu Aufgabe 50

Die Kurve ρ parametrisiert einen Kreis mit Radius a, während γ eine Ellipse mit den Halbachsen a und b darstellt.



Beide werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen und haben auf der reellen Achse zwei gemeinsame Punkte. Offensichtlich ist aber das ganze Gebiet, d. h. $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, kein Sterngebiet, sodass bekanntermaßen $1/z$ dort keine Stammfunktion besitzt. Kurvenintegrale lassen sich mit Hilfe von Stammfunktionen natürlich viel einfacher ausrechnen, da man nur den Anfangs- und Endpunkt kennen und benutzen muss. Aus diesem Grund teilen wir die Wege einfach auf:



Nehmen wir nun die geschlitzte Ebene, in welcher die untere imaginäre Achse fehlt, bzw. in Formeln

$$D_{\frac{3}{2}\pi} := \left\{ r\, e^{\mathrm{i}(\varphi + \frac{3}{2}\pi)} \in \mathbb{C} \;\middle|\; r > 0\,,\ \varphi \in (0, 2\pi) \right\}\,,$$

so ist diese selbstverständlich ein Sterngebiet, auf dem $1/z$ eine Stammfunktion besitzt. Dies bedeutet, das Integral hängt nur von dem Anfangs- und Endpunkt ab, d. h.

$$\int_{\rho|_{[0,\,1/2]}} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma|_{[0,\,1/2]}} \frac{1}{z}\, dz\ .$$

Mit der gleichen Argumentation kann man den unteren Teil des Weges betrachten und erhält:

$$\int_{\rho|_{[1/2,\,1]}} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma|_{[1/2,\,1]}} \frac{1}{z}\, dz\ .$$

Nun müssen die Wege nur noch zusammengesetzt werden und man erhält dich gewünschte Gleichung:

$$2\pi\mathrm{i} = \int_\rho \frac{1}{z}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz\ .$$

Dass das Kreisintegral über f gleich $2\pi\mathrm{i}$ ist, kann explizit und leicht nachgerechnet werden und als Ergebnis erhalten wir, dass auch der Weg der Ellipse den gleichen Wert hat. Schreiben wir dies doch einfach aus:

$$\begin{aligned} 2\pi\mathrm{i} &= \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi \int_0^1 \frac{-a\sin(2\pi t) + \mathrm{i}b\cos(2\pi t)}{a\cos(2\pi t) + \mathrm{i}b\sin(2\pi t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\tau) + \mathrm{i}b\cos(\tau)}{a\cos(\tau) + \mathrm{i}b\sin(\tau)}\, d\tau\ . \end{aligned}$$

Nun teilen wir das Integral in Imaginär- und Realteil auf:

$$2\pi\mathrm{i} = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\sin(\tau)\cos(\tau)}{a^2\cos^2(\tau) + b^2\sin^2(\tau)}\, d\tau + \mathrm{i}ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(\tau) + b^2\sin^2(\tau)}\, d\tau\ .$$

Nach dieser Gleichung muss der Realteil verschwinden und der Imaginärteil gleich 2π sein, d. h.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\, dt = \frac{2\pi}{ab}$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Es sei noch bemerkt, dass man das letzte Integral auch nur im Reellen lösen kann, indem man eine passende Substitution findet.