Das Argument der Diagonalfolge

Lemma 1 (Cantorsches Diagonalverfahren)**.** *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiere eine Folge*

$$\left(x_k^{(N)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \ . \tag{1}$$

Dann existiert eine Teilfolge $(k_\nu)_\nu \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_{\nu+1} > k_\nu$ derart, dass für alle natürliche Zahlen N der Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{k_\nu}^{(N)} \tag{2}$$

existiert.

Beweis. Zur Vollständigkeit führen wir diesen elementaren Beweis aus. Der metrische Raum K ist kompakt und somit folgenkompakt, d. h. für die Folge $\left(x_k^{(1)}\right)_k$ gibt es eine Teilfolge $j_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurz mit $j_1(\nu)$ bezeichnet, für die der Grenzwert

$$y_1 := \lim_{\nu\to\infty} x_{j_1(\nu)}^{(1)} \tag{3}$$

existiert. Betrachten wir nun die Folge $\left(x_{j_1(\nu)}^{(2)}\right)_\nu$, so existiert auch für diese eine Teilfolge $j_2(\nu)$ von $j_1(\nu)$, für die

$$y_2 := \lim_{\nu\to\infty} x_{j_2(\nu)}^{(2)} \tag{4}$$

existiert. Führen wir dieses Prinzip weiter, erhalten wir demnach für jede natürliche Zahl n eine Folge

$$j_n \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ , \tag{5}$$

welche eine Teilfolge des Vorgängers $j_{n-1}(\nu)$ ist und zwar so, dass der jeweilige Grenzwert y_n existiert. Nun tritt das Diagonalverfahren in Kraft, d. h. wir wählen aus jeder Teilfolge ein Glied aus und bilden somit eine weitere Folge

$$k \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ mit } k_\nu := j_\nu(\nu) \ . \tag{6}$$

Diese erfüllt letztendlich, dass der Grenzwert

$$y_N := \lim_{\nu\to\infty} x_{k_\nu}^{(N)} \tag{7}$$

für alle natürliche Zahlen N existiert. □