

Übungen zur Klausurvorbereitung

1 Frageteil

Aufgabe 1.1

Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?

Aufgabe 1.2

Skizzieren sie das Phasenportrait der Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3

Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf (Eindeutigkeits- und Existenzaussage)?

Aufgabe 1.4

Geben Sie eine Parametrisierung $\phi : U \rightarrow U'$ der S^2 mit Hilfe von Kugelkoordinaten an. Geben Sie dabei sowohl Definitionsbereich als auch den Bildbereich von ϕ an.

Aufgabe 1.5

Es sei M eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Wie ist der Tangentialraum $T_p M$ definiert?

Aufgabe 1.6

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z$. Ist $M := f^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit? Falls ja, geben Sie den Normaleneinheitsvektor am Punkt $(0, 0, 0)$ an.

2 Aufgabenteil

Aufgabe 2.1

- Zeige Sie, dass durch $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^4, 1 \leq z \leq 2\}$ eine berandete Mannigfaltigkeit gegeben ist.
- Skizzieren Sie M .
- Geben Sie ∂M an.
- Geben Sie das nach außenweisende Normaleneinheitsvektorfeld an der Stelle $(1, 0, 1)$ an

Aufgabe 2.2

Es sei $U := (0, 1) \times (0, 1)$ und $M := \{(x, y, \frac{1}{3}y^3) \mid (x, y) \in U\}$.

- Skizzieren Sie M .
- Geben Sie eine Parametrisierung von M an.
- Wählen Sie eine Orientierung von M an.
- Berechnen Sie folgendes Integral für $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 3yz}$

$$\int_M f dF .$$