Multiplikation und Addition

Assoziativ-Gesetz

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Kommutativ-Gesetz (Vertauschungsgesetz)

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Distributiv-Gesetz (*"Punkt vor Strich"*)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Brüche

$$\frac{a}{a} = 1$$

"Aus Summen kürzen nur die Dummen"

$$\frac{a+b}{a+c} \neq \frac{1+b}{1+c}$$
$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Hauptnenner finden

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{dc} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Durch einen Bruch teilen → mit Kehrwert multiplizieren

$$\frac{a+b}{\frac{c}{d}} = (a+b)\frac{d}{c}$$

Potenzen a^n

Begriffe zu Potzenzen

a	ist die Basis
n	ist der Exponent

Potenzen mit gleicher Basis

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Potenzieren einer Potenz

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Wurzeln $\sqrt[n]{a}$

Begriffe zu Wurzeln

n	ist der Wurzelexponent
a	ist der Radikand

Definition Wurzel

$$x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a} \qquad (a \in \mathbb{R}, a \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

Negativer Radikand und ungerader Exponent

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \qquad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ ungerade})$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ gelten folgende Regeln

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

Logarithmen $x = \log_b a$

Begriffe zu Logarithmen

b	ist die Basis

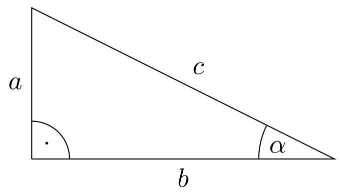
Definitionen

$\ln a = \log_e a$	natürlicher Logarithmus
$\lg a = \log_{10} a$	dekadischer Logarithmus

Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0 \qquad \log_b b^u = u \qquad e^{\ln a} = a$$
$$\log_b u^n = n \log_b u \qquad \log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$
$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_b u \qquad \log_b u \cdot v = \log_b u + \log_b v$$
$$\log_b x = \log_b g \log_g x \qquad \text{"Basiswechsel"}$$

Nützliche Formeln



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{Satz des Pythagoras}$$

Additionstheoreme

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \text{Eulersche Identität}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$

$$\longrightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$
$$n! \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1) = (n+1)!$$

Summen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k + a_n$$

Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{Binomialkoeffizient}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & & & n=0 \\
 & & & & \swarrow & & \searrow & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & & n=1 \\
 & & & \swarrow & \searrow & + & \swarrow & \searrow & & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & & n=2 \\
 & & \swarrow & \searrow & + \swarrow & & \searrow + & \swarrow & \searrow & & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & & n=3 \\
 & \swarrow & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow & & & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & & n=4 \\
\swarrow & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow & & & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & & n=5
\end{array}$$

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/2010**

Übungsblatt A1–Partialbruchzerlegung und vollständige Induktion

1. *Partialbruchzerlegung*
   Führen sie für folgende Brüche eine Partialbruchzerlegung durch:

   (a) $\frac{5x-17}{(x-3)(x-5)}$

   (b) $\frac{x^2}{(x-1)^3}$

   (c) $\frac{x^5-2x^3+4x^2-3x-2}{x^3-x}$

   (d) * $\frac{2x^3+3x+2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}$

2. *Vollständige Induktion*
   Beweisen sie durch vollständige Induktion das folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen N gelten:

   (a) $$\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

   (b) $$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}$$

   (c) $$\sum_{k=0}^{N}(2k+1) = (N+1)^2$$ (Summe der ersten $N+1$ ungeraden Zahlen)

   (d) * $$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$ (Partialsumme der geometrischen Reihe)

   (e) * Eine Folge ist definiert durch $a_1 = 2$, $a_{N+1} = 2 - (a_N)^{-1}$.
   Zeigen sie: Das N-te Folgenglied ist gegeben durch $a_N = \frac{n+1}{n}$

   Hinweis: Die vorgehensweise für eine vollständige Induktion ist in Augabe 1b) auf Übungsblatt 1 beschrieben.

Lösungen zu Aufgabe 1. :

(a) $\frac{5x-17}{(x-3)(x-5)} = \frac{1}{x-3} + \frac{4}{x-5}$

(b) $\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$

(c) $\frac{x^5-2x^3+4x^2-3x-2}{x^3-x} = x^2 - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

(d) $\frac{2x^3+3x+2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}}{x+i} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{x-(1+i)} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{x-(1-i)}$

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 1 – Zeichen und Zahlen

1. *Summen*

   (a) Zeigen Sie mit dem Gaußschen Rezept, dass die Formel für die Summe der ersten m natürlichen Zahlen
   $$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{1}{2} m(m+1)$$
   auch für ungerade m gilt.

   (b) Beweisen Sie die angegebene Formel für die Summe der ersten m Quadrate natürlicher Zahlen,
   $$\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1),$$
   durch vollständige Induktion.
   Hinweis: Vorgehensweise bei der vollständigen Induktion:
   - Zeigen Sie explizit, daß die Behauptung für $m = 1$ gilt.
   - Nehmen Sie an, die Behauptung gelte nun für alle $m = 1...k$, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sei. Zeigen Sie nun, daß die Behauptung für $m = k+1$ gilt, indem Sie die Behauptung für $m = k$ (und ggf. $m < k$) verwenden (die ja gelten soll).
   - Also gilt die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$.

2. *Rechnen mit Zahlen*

   (a) Bestimmen Sie die Länge der Raumdiagonalen in einem Würfel der Kantenlänge a.

   (b) Berechnen Sie $(a^4 - b^4)/(a - b)$.

   (c) Berechnen Sie $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$

   (d) Zeigen Sie, daß allgemein $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt.

   (e) Beweisen Sie das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks:
   $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 2 – Folgen und Reihen

1. *Grenzwerte*

   Man prüfe, ob die folgenden reellen Zahlenfolgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimme ihren Grenzwert:

   (a) $a_n = \dfrac{5n}{2n-1}$

   (b) $a_n = \dfrac{8+n}{3n-5}$

   (c) $a_n = \dfrac{2n^3 - n^2 + 3}{n^3 - 2n}$

   (d) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

2. *Rentenformel*

   Jemand zahlt seit Christi Geburt (Jahr Null) 1 Euro jährlich auf ein Sparbuch ein. Die Verzinsung beträgt 1% pro Jahr und wird wiederum auf dem Sparbuch angelegt. Heute würde er gerne eine Weltreise unternehmen. Hat er dazu genügend Geld?

3. *Partialbruchzerlegung*

   Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung den Grenzwert $N \to \infty$ für die Reihe

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} \; .$$

4. *Reihendarstellung einer Funktion*

   Welche Funktion $S(x)$ wird dargestellt durch die folgende Reihe?

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k$$

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 3 – Funktionen

1. *Logarithmus*

   (a) Berechnen Sie die Logarithmen $\log_2(16)$, $\log_4(16)$, $\log_{16}(16)$ und $\log_{64}(16)$.

   (b) Zeigen Sie, daß $\ln\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{1-e}\right) = -(1+\ln(1-e))$.

   (c) Berechnen Sie den Logarithmus von $y = a^{-2}(1+b)^3$.

2. *Trigonometrische Funktionen*

   Zeigen Sie folgende trigonometrische Formeln:

   (a) $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$

   (b)* $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

   (c)* $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

   (d) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

   (e) $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

   (f)* $\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

3. *Hyperbolische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen*

   Verifizieren Sie:

   (a) $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

   (b) $\operatorname{Arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

   (c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

4. *Heaviside–Funktion*

   Benutzen Sie durchgehend eine geeignete Variante der Heaviside-Funktion für die formale Darstellung folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (0\le x\le 1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x<-1) \\ 1 & (-1\le x\le 1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$

5. *Eigenschaften von Funktionen*

   Bestimmen Sie, ob bzw. in welchem Bereich die folgenden Funktionen gerade/ungerade, stetig, monoton und bijektiv sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

   (a) $f(x) = 2^x + 1$

   (b) $f(x) = x^4 + 2$

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 4 – Funktionen II

1. *Unterschied zwischen verschiedenen Notationen*

   Bestimmen Sie folgende Ausdrücke für $f(x) = x^2 + 2x$.

   (a) $f\left(x^{-1}\right)$
   (b) $\left(f(x)\right)^{-1}$
   (c) $f^{-1}(x)$

2. *Grenzwerte*

   Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$
   (b) $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   Hinweis: Beachten Sie bei (b) den Wertebereich der Sinusfunktion.

3. *Stetigkeit*

   Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert bzw. stetig? Setzen Sie diese in Definitionslücken, falls möglich, stetig fort und skizzieren Sie die Funktionen.

   (a) $\frac{\sin x}{x}$
   (b) $\frac{\sin^2 x}{x}$
   (c) $\arctan x$
   (d) $\frac{x-1}{x^2-1}$

4. *Definitionsbereiche*

   Skizzieren Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \ln\left(\left(16 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right)$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \sqrt{6 - 2x - 3y}$

5. *Umkehrfunktion*

   Finden Sie die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ und skizzieren Sie sowohl $f(x)$ als auch $f^{-1}(x)$. Wie kann man graphisch eine Umkehrfunktion bestimmen?

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 5 – Differentialrechnung

1. *Differentialquotient*

   Benutzen Sie die Definition der Ableitung durch den Differentialquotient
   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
   um die Ableitung folgender Funktionen zu bestimmen:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   (b) $f(x) = \cos x$

   Hinweis: Für (b) benutzen Sie die auf Blatt 3 hergeleitete Formel $\cos x - \cos y = -2 \sin((x + y)/2) \sin((x - y)/2)$.

2. *Umkehrfunktionen*

   Benutzen Sie die Umkehrfunktionsregel
   $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$
   um die Ableitung folgender Funktionen zu bestimmen:

   (a) $f(x) = \ln x$

   (b) $f(x) = \arctan x$

   (c) $f(x) = \operatorname{Artanh} x$

3. *Anwenden der Regeln*

   Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = x \sin x$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

   (c) $f(x) = \ln \left(\dfrac{1 - x}{1 + x} \right)$

   (d) $f(x) = \cos(\sin(\exp(2x^3 + 7)))$

4. *Mehrfachableitung*

   Sei $f(x) = \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Zeigen Sie, daß die n-te Ableitung gegeben ist durch
   $$f^{(n)}(x) = -\frac{(n - 1)!}{(2 - x)^n}.$$

5. *Extremwertaufgaben*

(a) Ein Stück Blech der Länge L und der Breite B soll so gebogen werden, daß es wie ein nach oben, vorne und hinten offener Quader aussieht, der die Länge L, die Breite D und die Höhe H besitzt, also $B = D + 2H$. Wie muß man das Blech biegen, damit das Volumen dieses Quaders maximal wird?

(b)) Der Querschnitt eines 25m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetzem Halbkreis. Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß ist?

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 6 – Differentialrechnung II und Taylorreihen

1. *Grenzwerte*

   Benutzen Sie die Regel von de l'Hospital, um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+7x^2+1}{2x^3+7x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} x \cot x$

2. *Taylorreihen*

   Berechnen Sie die Taylorreihen von $f(x) = (1+x)^r$ bis zum 4. Glied für $r = -3$, 1/3 und -1/3.

3. *Differentiation über Taylorreihen*

   Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen durch gliedweises Differenzieren der jeweiligen Taylorreihen und schließen Sie daraus auf die Ihnen bekannte Form der Ableitung:

   (a) $f(x) = \ln(1+x)$

   (b) $f(x) = \sin x$

4. *Rechnen mit Reihen*

   Bestimmen Sie die ersten 4 Terme der Taylorreihen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = \cosh x$ durch Addition zweier Reihen,

   (b) $f(x) = \exp(\sin x)$ durch Ineinandersetzen zweier Reihen.

   (c)* $f(x) = \tan x$ durch Division zweier Reihen,

   Hinweis: Bilden Sie den Quotienten zweier Reihen

   $$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots},$$

   indem Sie zuerst den Nenner entwickeln:

   $$\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots} \quad = \quad \frac{1}{b_0} \left. \frac{1}{1+y} \right|_{y = \frac{b_1}{b_0} x + \frac{b_1}{b_0} x^2 + \dots}$$

   Benutzen Sie hierbei die bekannte Reihe für $1/(1+x)$. Damit wird der Quotient zweier Reihen zu einem Produkt zweier Reihen.

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 7 – Integralrechnung

1. *Fehlerfortpflanzung*

   Eine Größe y, die Sie experimentell bestimmen wollen, habe folgende funktionale Abhängigkeit von drei Meßgrößen x_1, x_2 und x_3:

   $$y = \frac{x_1 x_2^2}{x_3}$$

   Nehmen Sie an, daß die relative Genauigkeit, mit der Sie die x_i bestimmen können, 1% beträgt: $\frac{\Delta x}{x_i} = 0.01$. Bestimmen Sie die relative Genauigkeit, mit der Sie y bestimmen können.
   Hinweis: Betrachten Sie y nacheinander als Funktion von x_1 bis x_3, wobei die jeweils zwei anderen Meßgrößen einfach als Parameter in der Funktion fungieren. Nähern Sie die funktionale Abhängigkeit von den x_i durch den jeweils linearen Term in der Taylor–Reihe.

2. *Einfache Integrale*

   Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int (x^3 - x^4) dx$
   (b) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$
   (c) $\int_{-a}^{a} (x^3 - x^5) dx$
   (d) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$

   Hinweis: Bei (d) helfen eine Symmetrieüberlegung und der Winkelfunktions–Pythagoras.

3. *Einfache Integrale II*

   Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung:

   (a) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$
   (b) $\int \frac{dx}{x^3 - x}$
   (c) $\int dx \, \frac{6 - x}{2x^2 + 2x - 15}$

4. *Grenzwerte*

   Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \int_0^x a \exp(-at) dt$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4}$

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 8 – Integralrechnung II

1. *Substitutionsregel*

   Bestimmen Sie folgende Integrale mittels der Substitutionsregel:

   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{az+b}}$ (b) $\int dt\; x'(t)x(t)$

   (c) $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^{2n+1}}$ (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\phi}{1+\cos^2\phi}\, d\phi$

   (e) $\int dx\; x\sqrt{x^2 \pm a}$ (f) $\int dx \frac{x}{1+x^4}$

2. *Partielle Integration*

   (a) $\int_0^y dx \sin x \exp(-x)$ (b) $\int dx \arcsin x$

   (c) $\int dx\; x\sqrt{1+x}$ (d) $\int dx\, x^3 \exp(x^2)$

   (e) $\int dx\; x^2 \ln x$ (f) $\int dx \ln(x^2+1)$

3. *Uneigentliche Integrale*

   Berechnen Sie die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren:

   (a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$

   (b) $\int_{0+}^{1} \frac{dx}{x^a}$

   (c) $\int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{x^a}$

4. *Harmonische Reihe*

   Zeigen Sie, daß die harmonische Reihe

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

   divergent ist, indem Sie zwei Integrale als eine obere und eine untere Schranke konstruieren, die beide auch divergent sind.

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 9 – Komplexe Zahlen

1. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

   Berechnen Sie (d.h. bestimmen Sie explizit Real– und Imaginärteil) für die komplexe Zahl $c := 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$ folgende Ausdrücke:

   (a) $c\,c^*$ (b) c^2

   (c) $\frac{c}{c^*}$ (d) $\frac{1}{c}$

   (e) $\frac{1}{c^*}$ (f) $\frac{1}{c} + \frac{1}{c^*}$

   (g) $\frac{1}{c} - \frac{1}{c^*}$ (h) c^3

2. *Komplexe Zahlenebene*

   Zeigen Sie: Drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 liegen genau dann auf einer Geraden in der komplexen Zahlenebene, wenn

   $$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

3. *Darstellung einer einfachen Funktion*

   Diskutieren Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ für die komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$:

   (a) Was ist der Definitions– und was ist der Wertebereich?

   (b) Zeichnen Sie $\mathrm{Re} f(z)$ und $\mathrm{Im} f(z)$ als Funktion von x und y.

   (c) Diskutieren Sie in den obigen dreidimensionalen Darstellungen Schnitte für jeweils konstantes x und y (Nullstellen, Extrema, Unendlichkeiten).

4. *Formel von Moivre*

   Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre:

   $$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 10 – Komplexe Zahlen II

1. *Pythagoras für komplexe Argumente*

   Zeigen Sie, daß
   $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
   auch für komplexe Argumente z gilt. Benutzen Sie dazu die Definition von Sinus und Cosinus über die Exponentialfunktion.

2. *Wurzeln*

   Berechnen Sie folgende Wurzeln und veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene:

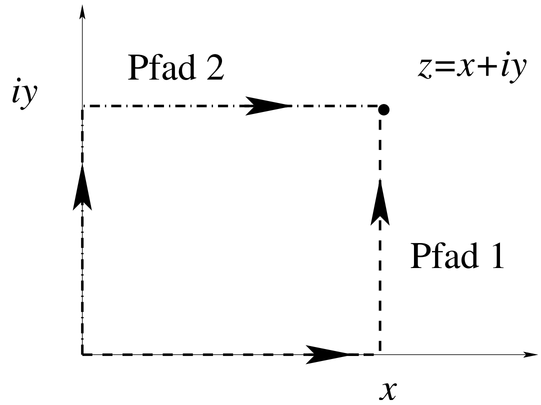
   (a) $w = \sqrt[3]{\mathrm{i}}$ (b) $w = \sqrt[4]{-1}$
   (c) $w = \sqrt[8]{1}$ (d) $w = \sqrt[4]{-\mathrm{i}}$
   (e) $w = \sqrt{8\mathrm{i}}$

3. *Potenzieren*

   Berechnen und vergleichen Sie $(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{i}}$ mit $\mathrm{i}^{(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})}$. Warum hat der erste Ausdruck mehr Werte als der zweite?

4. *Integrieren*

   In der Vorlesung wurde erwähnt, daß die Regeln des Differenzierens und Integrierens von der reellen Zahlengeraden in die komplexen Zahlenebene übernommen werden können. Beispielsweise soll also gelten:
   $$\int dz\, z = \frac{z^2}{2} + c$$
   für komplexes z. Betrachten Sie nun das bestimmte Integral
   $$\int_0^z dz'\, z' \qquad (z = x + \mathrm{i}y).$$
   Berechnen Sie dieses zum einen über die oben angegebene Stammfunktion, und zum anderen “zu Fuß” über zwei verschiedene Pfade in der komplexen Ebene:



Überzeugen Sie sich, daß bei allen drei Vorgehensweisen das gleiche herauskommt.

Hinweis: Für Pfad 1 beispielsweise sieht das Integral folgendermaßen aus:

$$\int_0^z dz'\ z' = \int_0^x dx'\ (x' + \mathrm{i}0) + \int_{\mathrm{i}0}^{\mathrm{i}y} d(\mathrm{i}y')\ (x + \mathrm{i}y').$$

Damit hat man das Integral in die wohlbekannte Form “entlang einer Geraden” gebracht.

Dr. Martin Oettel
Institut für Physik
Staudinger Weg 7, 01-317
oettelm@uni-mainz.de

Vorkurs Mathematik **Wintersemester 2009/10**

Übungsblatt 11 – Auswertung von Experimenten

1. *Zwei einfache "Experimente"*

   Bitte suchen Sie sich eines von den beiden "Experimenten" aus. Bilden Sie dazu kleinere Gruppen (etwa 4–6 Personen).

   - Wählen Sie sich ein größeres rechteckiges Objekt (Tischreihe, Fenster, gesamter Raum ...) und messen Sie Länge L und Breite B mit einem Schullineal. (Beim Hintereinanderlegen des Lineals müssen Sie nicht sehr penibel sein, d.h. Markieren mit dem Finger genügt.) Messen Sie L und B jeweils mehrfach (etwa n=20 mal). Bilden Sie für jede Messung (L_i, B_i) die Fläche $A_i = L_i B_i$. Bestimmen Sie nun folgende Größen:

     (a) Mittelwerte $\bar{L}$, $\bar{B}$ und $\bar{A}$. Der Mittwelwert ist definiert durch

     $$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \qquad f = \{L, B, A\}.$$

     (b) Statistische Unsicherheiten (Standardabweichungen) δL, δB und δA. Die Standardabweichung ist definiert durch

     $$\delta f = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f_i - \bar{f})^2}.$$

     (c) Berechnen Sie nun eine zweite statistische Unsicherheit $\delta' A$ für die Fläche A über die Fehlerfortpflanzungsformel für statistische Unsicherheiten.

     $$\delta' A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial L}\,\delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial B}\,\delta B\right)^2}$$

     und vergleichen Sie δA und $\delta' A$. Wenn es signifikante Unterschiede gibt, woran könnte dies liegen?

     (d) Geben Sie das Endergebnis für A mit Fehlergrenzen an, wobei Sie auch noch mögliche systematische Fehler berücksichtigen. Die hier notwendige statistische Unsicherheit des *Mittelwertes* ist definiert durch:

     $$\delta\bar{f} = \frac{\delta f}{\sqrt{n}}.$$

     Warum ist der Faktor $1/\sqrt{n}$ hier sinnvoll?

   - Bestimmen Sie Ihre Pulsfrequenz f, indem Sie

- einmal die Zeit T für N=200 Pulsschläge messen und $f = N/T$ berechnen.
- fünfmal jeweils die Zeit T_i für $N = 40$ Pulsschläge messen und daraus jeweils f_i bestimmen.
- 20mal jeweils die Zeit T_i für $N = 10$ Pulsschläge messen und daraus jeweils f_i bestimmen.

(a) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{f}$ und die Standardabweichung δf (Definitionen siehe oben) jeweils für die zweite und dritte Versuchsrealisierung. Warum braucht man hier keine Fehlerfortpflanzung zu berücksichtigen?

(b) Schätzen Sie den systematischen Fehler für alle drei Realisierungen ab und geben Sie ein Endergebnis für f mit allen Fehlergrenzen an. Beachten Sie dabei die Definition der statistischen Unsicherheit des Mittelwertes (s. oben).