Restgliedformeln

1. Restgliedformel von Taylor

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar, $D \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und $x_0 \in D$ so gilt für das Restglied für das n-te Taylorpolynom bei x_0 :

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}$$

Beweis: Hauptsatz der Integralrechnung + Partielle Integration

2. Restgliedformel von Lagrange

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar, $D \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und $x_0 \in D$, so existiert ein $\xi \in [x_0, x]$ bzw. $\xi \in [x, x_0]$ und es gilt:

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Bemerkung: ξ hängt natürlich von der Wahl von x ab!
Beweis:
Die Funktion $f^{(n+1)}$ ist nach Voraussetzung stetig und nimmt daher auf $[x_0, x]$ bzw. $[x, x_0]$ ein Maximum bei x_M und Minimum bei x_m an. Dann folgt mit (1.1):

$$R_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \leq f^{(n+1)}(x_M) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n dt = f^{(n+1)}(x_M) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \geq f^{(n+1)}(x_m) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n dt = f^{(n+1)}(x_m) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Also:

$$f^{(n+1)}(x_m) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_{n+1}(x) \leq f^{(n+1)}(x_M) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [x_0, x]$ bzw. $\xi \in [x, x_0]$. $\square$

3. Abschätzung des Restgliedes

Wähle C so, dass $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq C$ für alle $\xi \in [x_0, x]$ bzw. $\xi \in [x, x_0]$ gilt:

$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{n+1}}$$