Definitionen der Algebra

1. Verknüpfung

Unter einer *Verknüpfung* versteht man im folgenden eine innere zweistellige Verknüpfung auf einer Menge M (d.h. eine Abbildung wie folgt):

$$\begin{aligned} * \ : \ M \times M &\longrightarrow M \\ (a,b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

2. Halbgruppe

Das Paar $(M, *)$ heißt eine *Halbgruppe*, wenn M eine Menge mit einer Verknüpfung $*$ ist, welche assoziativ ist:

$$(a * b) * c \ = \ a * (b * c) \qquad \forall a, b, c \in M$$

Wenn es keine Verwechslungsgefahr besteht, dann unterdrückt man die Erwähnung der Verknüpfung und spricht kurz von der Halbgruppe M.

3. Monoid

Das Tripel $(M, *, e)$ heißt ein *Monoid*, wenn $(M, *)$ eine Halbgruppe und $e \in M$ ein sogenanntes neutrales Element ist, d.h es gilt:

$$a * e \ = \ e * a \ = \ a \qquad \forall a \in M$$

Wenn die Verknüpfung und das neutrale Element bekannt sind, spricht man auch kurz von dem Monoid M.

4. Gruppe

Das Paar $(G, *)$ heißt eine *Gruppe*, wenn G eine Menge zusammen mit einer Verknüpfung $*$ ist, so dass gilt:

$$\begin{aligned} &(1): \ (a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G \quad \text{(Assoziativität)} \\ &(2): \ \exists e \in G \text{ für das gilt: } a * e = e * a = a \quad \forall a \in G \quad \text{(neutrale Element)} \\ &(3): \ \forall a \in G \ \exists a' \ \text{ so dass gilt: } \ a * a' = a' * a = e \quad \text{(inverse Element)} \end{aligned}$$

Man kann die Gruppe also auch als Monoid auffassen, wobei zusätzlich noch zu jedem Element ein inverses Element existiert.
Gilt zusätzlich

$$(4): a * b \ = \ b * a \quad \forall a, b \in G \quad \text{(Kommutativität)}$$

so spricht man von einer *abelschen Gruppe*.

5. Ring

Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt ein *Ring*, wenn R eine Menge mit zwei Verknüpfungen ($+$ und $\cdot$) ist, so dass gilt:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe
3. Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

(Um Klammern zu sparen verabredet man die „Punkt-vor-Strich“-Regelung)

6. Körper

Das Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt ein *Körper*, wenn K eine Menge mit zwei Verknüpfungen ($+$ und $\cdot$) ist, so dass gilt:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0
2. $(K \setminus 0, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1
3. Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

7. Vektorraum

Das Tripel $(V, +, \bullet)$ heißt ein $K-$*Vektorraum*, wenn $(K, +, \cdot)$ ein Körper und V eine Menge ist, sodass gilt:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $\bullet : K \times V \longrightarrow V$ ist die skalare Multiplikation, sodass $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda, \mu \in K$ gilt:
   a) $1 \bullet v = v$
   b) $(\lambda \cdot \mu) \bullet v = \lambda \bullet (\mu \bullet v)$
   c) $\lambda \bullet (v + w) = \lambda \bullet v + \lambda \bullet w$
   d) $(\lambda + \mu) \bullet v = \lambda \bullet v + \mu \bullet w$

Die unterschiedliche Schreibweisen der Multiplikationen und auch der Additionen scheint vielleicht etwas kleinlich zu sein, aber sollen zumindest in dieser Definition noch darauf hinweisen, dass es sich hier wirklich um verschiedene Verknüpfungen handelt. Da dies nun aber hiermit festgehalten wäre, kann man diese Unterschiedung fallen lassen und im konkreten Fall beide Multiplikationen mit $\cdot$ und die Additionen mit $+$ bezeichen.

Handelt es sich bei dem Körper um $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so sagt man auch kurz, V sei ein reeller bzw. komplexer Vektorraum (und unterdrückt wieder, wie gewohnt, die Erwähnung der Verknüpfungen).